

Momento angular II

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \longrightarrow [L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \xrightarrow{\text{en general}} [J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

momento angular orbital

$$\hat{\vec{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar J_k \epsilon_{ijk}$$

$$J^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

$$[J^2, J_i] = 0$$

∴ Podemos medir J^2 y UNA componente de $\hat{\vec{J}}$ simultáneamente.

Se suele poner el eje de cuantización a lo largo de z .

Buscaremos e.v. comunes a J^2, J_z

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad J_- = J_x - iJ_y$$

$$[J_z, J_+] = \hbar J_+ \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \quad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

Eigenvalores de J^2 y J_z

el que sea
Veamos $\langle J^2 \rangle \geq 0$

$$\langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle$$
$$\|J_x|\psi\rangle\|^2 + \|J_y|\psi\rangle\|^2 + \|J_z|\psi\rangle\|^2 \geq 0$$

Si $|\psi\rangle$ es e.v. J^2 con e.v. λ

$$0 \leq \langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle = \lambda \| |\psi\rangle \|^2$$

$\therefore \lambda \geq 0$ los e.v. de J^2 deben ser positivos.

$$\lambda = \hbar^2 j(j+1) \quad (j \text{ adimensional})$$

Escribiremos los e.v. de J_z como $\hbar m$
↑
adimensional.

Etiquetaremos los e.v. con j y m .

Nota: J_z y J^2 no son un conjunto completo de observables que conmutan.

Escribiremos los e.v. $|j, m\rangle$

Las ecuaciones de e.v. son

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$
$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

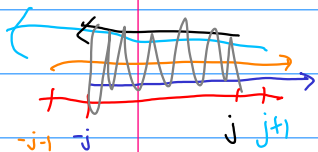
Si $m\hbar$ y $\hbar j(j+1)$ son los e.v. J_z y J^2 asoc. al mismo e.v. $|K, j, m\rangle$

Lema I: $-j \leq m \leq j$

$$\begin{aligned} \propto \|J_+ |K, j, m\rangle\|^2 &= \langle K, j, m | J_- J_+ |K, j, m\rangle \\ &= \langle K, j, m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z |K, j, m\rangle \\ &= \langle K, j, m | \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m |K, j, m\rangle \\ &= \hbar^2 j(j+1) - \underbrace{\hbar^2 m^2 - \hbar^2 m}_{-\hbar^2 m(m+1)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 \leq \|J_- |K, j, m\rangle\|^2 = j(j+1)\hbar^2 - \underbrace{m^2 \hbar^2 + m \hbar^2}_{-m(m-1)\hbar^2} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} j(j+1) - m(m-1) &\geq 0 \\ j(j+1) - m(m+1) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (j+m)(j-m+1) &\geq 0 \\ (j-m)(j+m+1) &\geq 0 \end{aligned}$$



$$-(j+1) \leq m \leq j$$

$\leq \leq$ no tiene sol.

$$\begin{aligned} j+m &\geq 0 & j-m+1 &\geq 0 \\ m &\geq -j & j+1 &\geq m \\ -j &\leq m & \leq j+1 \end{aligned}$$

el caso $\leq \leq$ no tiene sol

Para que se cumplan ambas

$$-j \leq m \leq j$$

$\therefore \vec{J}$ no puede apuntar directamente hacia $\hat{e}_z$.

Lema II : i) $m = -j \Leftrightarrow J_- |k, j, m\rangle = 0$

ii) Si $m > -j$ entonces $J_- |k, j, m\rangle \neq 0$ y es
eV de J^2 y J_z con e.v. $\hbar j(j+1)$ y $(m-1)\hbar$

Para osc. arm.
 $a|\phi_0\rangle = 0$
 $a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$

Demo:

i $\Rightarrow$) Usando (2) con $m = -j$
 $\|J_- |k, j, -j\rangle\|^2 = 0$

i $\Leftarrow$) $J_- |k, j, m\rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{J_+ J_-}_{J^2 - J_z^2 + \hbar J_z} |k, j, m\rangle = 0$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) |k, j, m\rangle = 0 \Rightarrow j(j+1) - m^2 + m = 0$$

$$(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar m) \underbrace{|k, j, m\rangle}_{\neq 0} = 0$$

$$(j+m)(j-m+1) = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} j+m=0 \\ m=-j \end{matrix}}$$

~~$$\begin{matrix} j-m+1=0 \\ -m=-j-1 \end{matrix}$$~~

ii) Si $m > -j$

Lema I: $-j \leq m \leq j$

$$\|J_- |k, j, m\rangle\|^2 > 0 \Rightarrow J_- |k, j, m\rangle \neq 0$$

Veamos que $J_- |k, j, m\rangle$ es eV de J^2 y J_z

$$J^2: [J^2, J_-] = [J^2, J_x + iJ_y] = 0$$

$$[J^2, J_-] |k, j, m\rangle = 0$$

$$J^2 \underbrace{J_- |k, j, m\rangle} - J_- \underbrace{J^2 |k, j, m\rangle} = 0 \Rightarrow J^2 J_- |k, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) J_- |k, j, m\rangle$$

$$J_z: \text{Recordamos } [J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_z, J_-] |k, j, m\rangle = -\hbar J_- |k, j, m\rangle$$

$$\begin{aligned} J_z \underbrace{J_- |k, j, m\rangle} &= J_- J_z |k, j, m\rangle - \hbar J_- |k, j, m\rangle \\ &= \hbar m J_- |k, j, m\rangle - \hbar J_- |k, j, m\rangle \\ &= \hbar(m-1) \underbrace{J_- |k, j, m\rangle} \end{aligned}$$

Lema III:

$$i) m=j \Leftrightarrow J_+ |k, j, m\rangle = 0$$

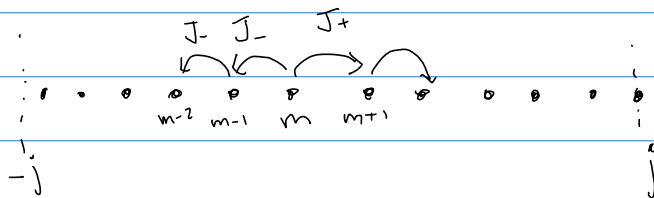
ii) Si $m < j$, $J_+ |k, j, m\rangle$ es e.v. de J^2 y J_z
con e.v. $j(j+1)\hbar^2$ y $(m+1)\hbar$

análogo

□

Espectro de J^2 y J_z

$$-j \leq m \leq j$$



Para que esto sea consistente

$$\begin{aligned} \exists \text{ un entero } p \geq 0 \text{ tal que } -j \leq m-p < -j+1 \\ \exists \text{ " " } q \geq 0 \text{ tal que } j-1 < m+q \leq j \end{aligned}$$

Argumentar que si m no es $m-p=j$ y uno aplica J_- demasiado se pasa de $m=-j$ y no se corta la secuencia y viola $-j \leq m \leq j$.

$$\rightarrow \frac{m-p}{m+q} = j \text{ con } p \text{ y } q \text{ enteros}$$

$$\Rightarrow 2j = p+q$$

$\therefore 2j$ es entero positivo

$j=0, 1, 2, \dots$ Bosones

$j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ Fermiones